1．抛物线C的方程为，过抛物线C上一点P(*x*0,y0)(*x* 0≠0)作斜率为k1,k2的两条直线分别交抛物线C于A(*x*1,y1)、B(*x*2,y2)两点(P,A,B三点互不相同)，且满足.

（1）求抛物线C的焦点坐标和准线方程；

（2）设直线AB上一点M，满足，证明线段PM的中点在y轴上；

（3）当=1时，若点P的坐标为（1，－1），求∠PAB为钝角时点A的纵坐标的取值范围.

答案为：

21.（1）解：由抛物线C的方程y=ax2(a<0)得，焦点坐标为（0,），准线方程为

      y= －

（2）证明：设直线PA的方程为y－y0=k1(x－x0).直线PB的方程为y-y0=k2(x-x0)

点P(x0,y0)和点A(x1,y1)的坐标是方程组

|  |  |
| --- | --- |
|

|  |
| --- |
| C:\Windows\MypicPath\bb1643003.gifC:\Windows\MypicPath\bb1643004.jpg  |

  |

的解，将②式代入①式得ax2－k1x+k1x0－y0=0，于是x1+x0=,故

             x1=－x0 ③

又点P(x0,y0)和点B(x2,y2)的坐标是方程组



的解，将⑤式代入④式得ax2－k2x+k2x0－y0=0，于是x2+x0=，故

          x2=-x0

由已知得，k2=－λk1，则x2=－k1－x0 ⑥

设点M的坐标为（xM, yM），由，则

            xM=

将③式和⑥式代入上式得

            xM==-x0，

即xM+x0=0，所以，线段PM的中点在y轴上.

（3）解：因为点P(1, －1)在抛物线y=ax2上，所以a=－1，抛物线方程为y=－x2.

由③式知x1=－k1－1，代入y= x2得y1= －(k1+1)2

将λ=1代入⑥式得x2=k1－1，代入y=－x2得y2=－(k1－1)2.

因此，直线PA、PB分别与抛物线C的交点A、B的坐标为

   A(－k1－1, －k12－2k1－1), B(k1－1, －k12+2k1－1)

于是

=(k1+2, k12+2 k1),

=(2k1,4k1)

·=2k1(k1+2)+4k1(k12+2k1)

          =2k1 (k1+2)(2k1+1)

因∠PAB为钝角且P、A、B三点互不相同，故必有·<0，即

                k1 (k1+2)(2k1+1)<0,

求得k1的取值范围为

  k1＜－2或－＜k1＜0

又点A的纵坐标y1满足y1= －(k1+1)2，故

     当k1<－2时，y1<－1

         当－＜k1＜0时，－1＜y1＜－

所以，∠PAB为钝角时点A的纵坐标y1的取值范围为

    (－∞，－1)∪(－1,－).

已知抛物线*C*：*y*＝(*x*+1)2与圆*M*：(*x*－1)2+(*y*－)2＝*r*2(*r*＞0)有一个公共点*A*，且在*A*处两曲线的切线为同一直线*l*.

（1）求*r*；

（2）设*m*，*n*是异于*l*且与*C*及*M*都相切的两条直线，*m*，*n*的交点为*D*，求*D*到*l*的距离．

答案为：

**解：**（1）设*A*(*x*0，(*x*0+1)2)，对*y*＝(*x*+1)2求导得*y*′＝2(*x*+1)，

故*l*的斜率*k*＝2(*x*0+1)．

当*x*0＝1时，不合题意，所以*x*0≠1.

圆心为*M*(1，)，*MA*的斜率.

由*l*⊥*MA*知*k*·*k*′＝－1，

即2(*x*0+1)·＝－1，

解得*x*0＝0，故*A*(0,1)，

*r*＝|*MA*|＝，即.

（2）设(*t*，(*t*+1)2)为*C*上一点，则在该点处的切线方程为*y*－(*t*+1)2＝2(*t*+1)(*x*－*t*)，

即*y*＝2(*t*+1)*x*－*t*2+1.

若该直线与圆*M*相切，则圆心*M*到该切线的距离为，

即，

化简得*t*2(*t*2－4*t*－6)＝0，

解得*t*0＝0，，.

抛物线*C*在点(*ti*，(*ti*+1)2)(*i*＝0,1,2)处的切线分别为*l*，*m*，*n*，其方程分别为*y*＝2*x*+1，①

*y*＝2(*t*1+1)*x*－*t*12+1，②

*y*＝2(*t*2+1)*x*－*t*22+1，③

②－③得.

将*x*＝2代入②得*y*＝－1，故*D*(2，－1)．

所以*D*到*l*的距离.

已知各项均为正数的两个数列{*an*}和{*bn*}满足：，*n*∈**N\***.

（1）设*bn*+1＝1+，*n*∈**N\***，求证：数列是等差数列；

（2）设，*n*∈**N\***，且{*an*}是等比数列，求*a*1和*b*1的值．

答案为：

**解：**（1）证明：由题设知，

所以，从而(*n*∈**N\***)，

所以数列是以1为公差的等差数列．

（2）因为*an*＞0，*bn*＞0，

所以，

从而1＜*an*+1＝.(\*)

设等比数列{*an*}的公比为*q*，由*an*＞0知*q*＞0.下证*q*＝1.

若*q*＞1，则，故当时，*an*+1＝*a*1*qn*＞，与(\*)矛盾；

若0＜*q*＜1，则*a*1＝＞*a*2＞1，故当时，*an*+1＝*a*1*qn*＜1，与(\*)矛盾．

综上，*q*＝1，故*an*＝*a*1(*n*∈**N\***)，所以1＜*a*1≤.

又(*n*∈**N\***)，所以{*bn*}是公比为的等比数列．

若，则，

于是*b*1＜*b*2＜*b*3.

又由得，所以*b*1，*b*2，*b*3中至少有两项相同，矛盾．所以，从而. 所以*a*1＝*b*1＝.

20．（本小题满分14分）

已知正三角形的三个顶点都在抛物线上，其中为坐标原点，设圆是的内接圆（点为圆心）

（Ⅰ）求圆的方程；

（Ⅱ）设圆的方程为，过圆上任意一点分别作圆的两条切线，切点为，求的最大值和最小值。

（Ⅰ）**解法一：**设A、B两点坐标分别为（），（），由题设知

，

解得，

所以A（6，2），B（6，-2）或A（6，-2），B（6，2）。

设圆心C的坐标为（r,0），则，所以圆C的方程为



**解法二：**设A、B两点坐标分别为（x1，y1），（x2，y2），由题设知



又因为，可得，即

。

由，可知x1＝0，故A、B两点关于x轴对称，所以圆心C在x轴上，

设C点的坐标为（r,0），则A点的坐标为（），于是有，解得r=4，所以圆C的方程为

。……4分

（Ⅱ）解：设∠ECF＝2a，则

……8分

在Rt△PCE中，，由圆的几何性质得



所以由此可得



故的最大值为，最小值为—8。

19．（本小题满分12分）

在平面直角坐标系xOy中，过定点C（0，p）作直线与抛物线x2=2py（p>0）相交于A、B两点。



（Ⅰ）若点N是点C关于坐标原点O的对称点，求△ANB面积的最小值；

（Ⅱ）是否存在垂直于y轴的直线l，使得l被以AC为直径的圆截得弦长恒为定值？若存在，求出l的方程；若不存在，说明理由。（此题不要求在答题卡上画图）

19．本小题主要考查直线、圆和抛物线等平面解析几何的基础知识，考查综合运用数学知识进行推理运算的能力和解决问题的能力.

**解法1：**

（Ⅰ）依题意，点N的坐标为N（0,-p）,可设A（x1,y1）,B（x2,y2），直线AB的方程为y=kx+p,与x2=2py联立得消去y得x2-2pkx-2p2=0.

由韦达定理得x1+x2=2pk,x1x2=-2p2.

于是

＝

＝



.

（Ⅱ）假设满足条件的直线l存在，其方程为y=a,AC的中点为径的圆相交于点P、Q，PQ的中点为H，则



＝.





=

＝





=

令，得为定值，故满足条件的直线l存在，其方程为，

即抛物线的通径所在的直线.

**解法2：**

（Ⅰ）前同解法1，再由弦长公式得



＝

又由点到直线的距离公式得.

从而，



（Ⅱ）假设满足条件的直线t存在，其方程为y=a，则以AC为直径的圆的方程为

将直线方程y=a代入得



设直线l与以AC为直径的圆的交点为P（x2,y2）,Q（x4,y4）,则有



令为定值，故满足条件的直线l存在，其方程为.

即抛物线的通径所在的直线。