三角恒等变换

一、选择题

1．设$a=\frac{1}{2}\cos 6^\circ-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 6^\circ, b=\frac{2\tan 13^\circ}{1+\tan^2 13^\circ}, c=\sqrt{\frac{1-\cos 50^\circ}{2}}$,则有（　　）

A. $a>b>c$　B. $a<b<c$　C. $a<c<b$　D. $b<c<a$

2．函数$y=\frac{1-\tan^2 2x}{1+\tan^2 2x}$的最小正周期是(　　)

A. $\frac{\pi}{4}$　B. $\frac{\pi}{2}$　C. π　D. 2π

3．$\sin 163^\circ \sin 223^\circ+\sin 253^\circ \sin 313^\circ=$（　　）

A. $-\frac{1}{2}$　B. $\frac{1}{2}$　C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

4．已知$\sin(\frac{\pi}{4}-x)=\frac{3}{5}$,则$\sin 2x$的值为（　　）

A. $\frac{19}{25}$　B. $\frac{16}{25}$　C. $\frac{14}{25}$　D. $\frac{7}{25}$

5．若$\alpha\in(0,\pi)$，且$\cos\alpha+\sin\alpha=-\frac{1}{3}$，则$\cos 2\alpha=$（　　）

A. $\frac{\sqrt{17}}{9}$　B. $\pm\frac{\sqrt{17}}{9}$　C. $-\frac{\sqrt{17}}{9}$　D. $\frac{\sqrt{17}}{3}$

6．函数$y=\sin^4 x+\cos^2 x$的最小正周期为（　　）

A. $\frac{\pi}{4}$　B. $\frac{\pi}{2}$　C. π　D. 2π

二、填空题

1．已知在ΔABC中，$3\sin A+4\cos B=6, 4\sin B+3\cos A=1$,则角$C$的大小为_____.

2．计算：$\frac{\sin 65^\circ+\sin 15^\circ \sin 10^\circ}{\sin 25^\circ-\cos 15^\circ \cos 80^\circ}$的值为_______.

3．函数$y=\sin\frac{2x}{3}+\cos(\frac{2x}{3}+\frac{\pi}{6})$的图象中相邻两对称轴的距离是______.

4．函数$f(x)=\cos x-\frac{1}{2}\cos 2x(x\in R)$的最大值等于________ .

5．已知$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$在同一个周期内，当$x=\frac{\pi}{3}$时，$f(x)$取得最大值为$2$，当$x=0$时，$f(x)$取得最小值为$-2$，则函数$f(x)$的一个表达式为_____________.

三、解答题

1．求值：（1）$\sin 6^0 \sin 42^0 \sin 66^0 \sin 78^0$；

（2）$\sin^2 20^0 + \cos^2 50^0 + \sin 20^0 \cos 50^0$。

2．已知 $A+B=\dfrac{\pi}{4}$，求证：$(1+\tan A)(1+\tan B)=2$

3．求值：$\log_2 \cos\dfrac{\pi}{9} + \log_2 \cos\dfrac{2\pi}{9} + \log_2 \cos\dfrac{4\pi}{9}$。

4．已知函数 $f(x)=a(\cos^2 x+\sin x\cos x)+b$

（1）当 $a>0$ 时，求 $f(x)$ 的单调递增区间；

（2）当 $a<0$ 且 $x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 时，$f(x)$ 的值域是 $[3,4]$, 求 a,b 的值.

参考答案

一、选择题

1. C　$a=\sin 30^0\cos 6^\circ-\cos 30^0\sin 6^\circ=\sin 24^0, b=\sin 26^0, c=\sin 25^0,$

2. B　$y=\dfrac{1-\tan^2 2x}{1+\tan^2 2x}=\cos 4x, T=\dfrac{2\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$

3. B　$\sin 17^\circ(-\sin 43^\circ)+(-\sin 73^\circ)(-\sin 47^\circ)=\cos 17^\circ\cos 43^\circ-\sin 17^\circ\sin 43^\circ=\cos 60^0$

4. D　$\sin 2x=\cos(\dfrac{\pi}{2}-2x)=\cos 2(\dfrac{\pi}{4}-x)=1-2\sin^2(\dfrac{\pi}{4}-x)=\dfrac{7}{25}$

5. A　$(\cos\alpha+\sin\alpha)^2=\dfrac{1}{9}, \sin\alpha\cos\alpha=-\dfrac{4}{9}$，而$\sin\alpha>0, \cos\alpha<0$

$$\cos\alpha-\sin\alpha=-\sqrt{(\cos\alpha+\sin\alpha)^2-4\sin\alpha\cos\alpha}=-\frac{\sqrt{17}}{3}$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)=-\frac{1}{3}\times(-\frac{\sqrt{17}}{3})$$

6. B　$y=(\sin^2 x)^2+\cos^2 x=(\sin^2 x)^2-\sin^2 x+1=(\sin^2 x-\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{3}{4}$

$$=\frac{1}{4}\cos^2 2x+\frac{3}{4}=\frac{1}{8}(1+\cos 4x)+\frac{3}{4}$$

二、填空题

1. $\dfrac{\pi}{6}$　$(3\sin A+4\cos B)^2+(4\sin B+3\cos A)^2=37, 25+24\sin(A+B)=37$

$\sin(A+B)=\dfrac{1}{2}, \sin C=\dfrac{1}{2}$，事实上$A$为钝角，$\therefore C=\dfrac{\pi}{6}$

2. $2+\sqrt{3}$　$\dfrac{\sin(80^0-15^0)+\sin 15^0\sin 10^0}{\sin(15^0+10^0)-\cos 15^0\cos 80^0}=\dfrac{\sin 80^0\cos 15^0}{\sin 15^0\cos 10^0}=\dfrac{\cos 15^0}{\sin 15^0}=2+\sqrt{3}$

3. $\dfrac{3\pi}{2}$　$y=\sin\dfrac{2x}{3}+\cos\dfrac{2x}{3}\cos\dfrac{\pi}{6}-\sin\dfrac{2x}{3}\sin\dfrac{\pi}{6}=\cos\dfrac{2x}{3}\cos\dfrac{\pi}{6}+\sin\dfrac{2x}{3}\sin\dfrac{\pi}{6}$

$=\cos(\dfrac{2x}{3}-\dfrac{\pi}{6}), T=\dfrac{2\pi}{\frac{2}{3}}=3\pi$，相邻两对称轴的距离是周期的一半

4. $\dfrac{3}{4}$　$f(x)=-\cos^2 x+\cos x+\dfrac{1}{2}$，当$\cos x=\dfrac{1}{2}$时，$f(x)_{\max}=\dfrac{3}{4}$

5. $f(x)=2\sin(3x-\dfrac{\pi}{2})$　$A=2, \dfrac{T}{2}=\dfrac{\pi}{3}, T=\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{2\pi}{\omega}, \omega=3, \sin\varphi=-1$，可取$\varphi=-\dfrac{\pi}{2}$

三、解答题

1. 解：（1）原式$=\sin 6^0\cos 12^0\cos 24^0\cos 48^0=\dfrac{\sin 6^0\cos 6^0\cos 12^0\cos 24^0\cos 48^0}{\cos 6^0}$

$$=\frac{\frac{1}{2}\sin 12^0\cos 12^0\cos 24^0\cos 48^0}{\cos 6^0}=\frac{\frac{1}{4}\sin 24^0\cos 24^0\cos 48^0}{\cos 6^0}$$

$$=\frac{\frac{1}{8}\sin 48^0\cos 48^0}{\cos 6^0}=\frac{\frac{1}{16}\sin 96^0}{\cos 6^0}=\frac{\frac{1}{16}\cos 6^0}{\cos 6^0}=\frac{1}{16}$$

（2）原式$=\dfrac{1-\cos 40^0}{2}+\dfrac{1+\cos 100^0}{2}+\dfrac{1}{2}(\sin 70^0-\sin 30^0)$

$$=1+\frac{1}{2}(\cos 100^0-\cos 40^0)+\frac{1}{2}\sin 70^0-\frac{1}{4}$$

$$=\frac{3}{4}-\sin 70^0\sin 30^0+\frac{1}{2}\sin 70^0=\frac{3}{4}$$

2. 证明：$\because A+B=\dfrac{\pi}{4},\therefore \tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=1,$

得 $\tan A+\tan B=1-\tan A\tan B,$

$1+\tan A+\tan B+\tan A\tan B=2$

$\therefore (1+\tan A)(1+\tan B)=2$

3. 解： $\cos\dfrac{\pi}{9}\cos\dfrac{2\pi}{9}\cos\dfrac{4\pi}{9}=\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{9}\cos\dfrac{\pi}{9}\cos\dfrac{2\pi}{9}\cos\dfrac{4\pi}{9}}{\sin\dfrac{\pi}{9}}=\dfrac{1}{8}$

4. 解： $f(x)=a\cdot\dfrac{1+\cos 2x}{2}+a\cdot\dfrac{1}{2}\sin 2x+b=\dfrac{\sqrt{2}a}{2}\sin(2x+\dfrac{\pi}{4})+\dfrac{a}{2}+b$

（1） $2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\le 2x+\dfrac{\pi}{4}\le 2k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\pi-\dfrac{3\pi}{8}\le x\le k\pi+\dfrac{\pi}{8},$

$[k\pi-\dfrac{3\pi}{8},k\pi+\dfrac{\pi}{8}],k\in Z$ 为所求

（2） $0\le x\le\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{4}\le 2x+\dfrac{\pi}{4}\le\dfrac{5\pi}{4},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\le\sin(2x+\dfrac{\pi}{4})\le 1$，

$f(x)_{\min}=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}a+b=3,f(x)_{\max}=b=4,$

$\therefore a=2-2\sqrt{2},b=4$