北京市西城区 2010—2011 学年度第一学期期末试卷(北区)

高二数学(文科)

2011.1

本试卷满分：150 分　考试时间：120 分钟

A 卷［选修模块 1-1］　本卷满分：100 分

题号	一	二	三			本卷总分
			17	18	19	
分数						

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1. 下列命题中的真命题是（　　）

A. $\forall x\in \mathbf{R}$，$x+1>0$　　B. $\forall x\in \mathbf{R}$，$x^2-1\geqslant 0$

C. $\exists x\in \mathbf{R}$，$|x|+1<0$　　D. $\exists x\in \mathbf{R}$，$x^2\leqslant 0$

2. 设抛物线的焦点为 $F(-2，0)$，则抛物线的标准方程是（　　）

A. $y^2=-8x$　　B. $x^2=-8y$　　C. $y^2=-4x$　　D. $x^2=-4y$

3. 设函数 $f(x)=x-\ln x$ 的导函数为 $f'(x)$，那么 $f'(x)=$(　　)

A. $1-e^x$　　B. $1+e^x$　　C. $\dfrac{x-1}{x}$　　D. $\dfrac{x+1}{x}$

4. “$mn<0$”是“方程 $mx^2+ny^2=1$ 表示双曲线”的（　　）

A. 充分但不必要条件　　B. 必要但不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分又不必要条件

5. 函数 $f(x)=x^2-2x$ 的极值点为（　　）

A. 1　　B. -1　　C. 2　　D. -2

6. 已知椭圆的焦距是短轴长的 2 倍，那么椭圆的离心率为（　　）

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　B. $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　　C. $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$　　D. $\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$

7. 在下列区间中，使函数 $f(x)=x^2\cdot e^x$ 单调递减的区间是(　　)

A. $(-3，-1)$　　B. $(-1，0)$　　C. $(0，1)$　　D. $(1，3)$

8. 已知命题"$(\neg p)\vee(\neg q)$"是假命题，给出下列四个结论：

① 命题"$p\wedge q$"是真命题；　　② 命题"$p\wedge q$"是假命题；

③ 命题"$p\vee q$"是真命题；　　④ 命题"$p\vee q$"是假命题.

其中正确的结论为（　　）

A. ①、③　　B. ②、③　　C. ①、④　　D. ②、④

9. 设函数 $y=ax^2+1$ 的图象为曲线 C，若直线 $y=x$ 与曲线 C 相切，则实数 $a=$（　　）

A. $\frac{1}{8}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. 4　　D. 8

10. 已知椭圆 $x^2+\frac{y^2}{5}=1$ 的两个焦点是 F_1，F_2，点 P 在椭圆上，点 A 在 x 轴上. 如果 $\overrightarrow{F_1A}=\overrightarrow{AP}$，那么 $\frac{|PF_2|}{|PF_1|}=$（　　）

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{5}$　　C. $\frac{1}{6}$　　D. $\frac{1}{9}$

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分. 把答案填在题中横线上.

11. 命题"$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2-x-1>0$"的否定是：____________________.

12. 已知函数 $f(x)=\cos x$，那么 $f'(\frac{\pi}{6})=$ __________.

13. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$ 的离心率为 2，两个焦点为 $F_1(4,0)$，$F_2(-4,0)$，那么双曲线的渐近线方程为____________________.

14. 函数 $f(x)=x^3+ax^2+x$ 的导函数是 $f'(x)$，若 $f'(x)$ 是偶函数，则实数 $a=$_____.

15. 设直线 $y=x+1$ 与椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 相交于 A，B 两点，则 $|AB|=$____________.

16. 已知两点 $A(0,0)$，$B(2,0)$. 如果椭圆 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (b>0)$ 上存在点 C，使得$\triangle ABC$ 为等边三角形，那么 $b=$__________.

三、解答题：本大题共 3 小题，共 36 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17．（本小题满分 12 分）

已知抛物线 $y^2=2px$（$p>0$）的焦点为 F，准线方程是 $x=-\frac{1}{2}$.

（1）求抛物线的方程；

（2）设点 P 在抛物线上，且 $|PF|=2$，若 O 为坐标原点，求△OFP 的面积.

18．（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=x^3-3ax-1$ 在 $x=-1$ 处取得极值.

（1）求实数 a 的值；

（2）当 $x\in[-2,0]$ 时，求函数 $f(x)$ 的值域.

19．（本小题满分 12 分）

已知两点 $F_1(-2,0)$，$F_2(2,0)$，曲线 C 上的动点 P 满足 $|PF_1|+|PF_2|=\sqrt{2}|F_1F_2|$.

（1）求曲线 C 的方程；

（2）曲线 C 上是否存在点 M，使得 $\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=3$？若存在，求出点 M 的坐标；若不存在，说明理由.

B 卷［学期综合］　　本卷满分：50 分

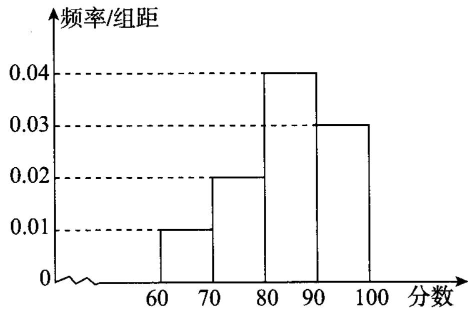
题号	一	二		本卷总分
		7	8	
分数				

一、填空题：本大题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分．把答案填在题中横线上．

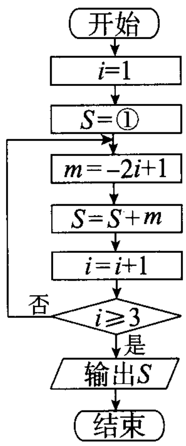
1. 对甲、乙两组青年进行体检，得到如图所示的身高数据（单位：cm）的茎叶图，那么甲组青年的平均身高是__________ cm.
若从乙组青年中随机选出一人，他的身高恰为 175cm 的概率为__________.

甲组		乙组
1　3　4	18	5　2　4
3　3　2　4	17	8　5　5　6　9
5　3　2	16	4　8

2. 期中考试后，学校对高二年级的数学成绩进行统计，全年级 500 名同学的成绩全部介于 60 分与 100 分之间．将他们的成绩数据绘制成如图所示的频率分布直方图，由图中数据可知，成绩大于或等于 80 分的学生人数为__________.
若要从全体学生中，用分层抽样的方法抽取 60 名同学的试卷进行分析，则从成绩在［90，100］内的学生中抽取的人数应为__________.



3. 阅读如图所示的程序框图，当输出结果为 6 时，在处理框中①处的数值应该是__________.



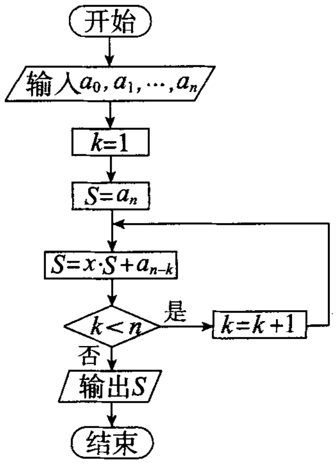
4. 一个袋中装有 4 个形状大小完全相同的球，球的编号分别为 1，2，3，4．现从袋中随机取一个球，记该球的编号为 m，将球放回袋中，然后再从袋中随机取一个球，记该球的编号为 n，那么随机事件“$|m-n|\leqslant 1$”的概率是__________.

5. 已知圆的半径是 1，A 为圆周上的一个定点，在该圆周上随机取一点 B，则劣弧 AB 的长度小于 1 的概率是______.

6. 已知 n 次多项式 $S_n(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^i$.

① 当 $x=x_0$ 时，求 $S_n(x_0)$ 的值通常要逐项计算，如：计算 $S_2(x_0)=a_2x_0^2+a_1x_0+a_0$ 共需要 5 次运算（3 次乘法，2 次加法），依此算法计算 $S_n(x_0)$ 的值共需要________次运算.

② 我国宋代数学家秦九韶在求 $S_n(x_0)$ 的值时采用了一种简捷的算法，实施该算法的程序框图如图所示，依此算法计算 $S_n(x_0)$ 的值共需要________次运算.



二、解答题：本大题共 2 小题，共 26 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

7. （本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=(x^2-ax-a)e^x$，其中 $a\in\mathbf{R}$.

（1）若 $a=1$，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（2）当 $x\in[-2,2]$时，求函数 $f(x)$ 的最小值.

8. （本小题满分 13 分）

已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率是 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，且经过点 $M(2,1)$. 直线 $y=\dfrac{1}{2}x-1$ 与椭圆相交于 A，B 两点.

（1）求椭圆的方程；

（2）求△MAB 的内心的横坐标.

北京市西城区 2010 — 2011 学年度第一学期期末试卷（北区）

高二数学（文科）参考答案及评分标准　　2011.1

A 卷 [选修 模块 1-1]

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.

1．D；　2．A；　3．C；　4．C；　5．A；　6．B；　7．B；　8．A；　9．B；　10．D.

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分.

11．$\forall x\in \mathbf{R}$，$x^2-x-1\leqslant 0$；　12．$-\dfrac{1}{2}$；　13．$y=\pm\sqrt{3}x$；

14．0；　15．$\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$；　16．$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

三、解答题：本大题共 3 小题，共 36 分.（如有其它方法，仿此给分）

17.（本小题满分 12 分）

解：（1）因为抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$ 的准线方程为 $x=-\dfrac{p}{2}$，

所以 $p=1$，

所以抛物线的方程为 $y^2=2x$.　………………… 5 分

（2）设点 $P(x,y)$.

因为 点 P 在抛物线上，且 $|PF|=2$，

由抛物线的定义得，$x-(-\dfrac{1}{2})=2$，　所以 $x=\dfrac{3}{2}$.　………………… 8 分

将 $x=\dfrac{3}{2}$ 代入 $y^2=2x$，得 $|y|=\sqrt{3}$.　………………… 10 分

所以 $\triangle OFP$ 的面积为 $S=\dfrac{1}{2}|OF|\cdot|y|=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.　………………… 12 分

18.（本小题满分 12 分）

解：（1）$f'(x)=3x^2-3a$，　………………… 2 分

依题意，得 $f'(-1)=0$，　即 $3-3a=0$，　解得 $a=1$.　………………… 4 分

（2）由 $f(x)=x^3-3x-1$，得 $f'(x)=3x^2-3$.　………………… 5 分

令 $f'(x)=3x^2-3=0$,. 得 $x=\pm1$. ………………… 7 分

列表分析如下：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+

所以 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递增，在 $(-1,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增. ………… 10 分

从而在区间 $[-2,0]$ 上，函数 $f(x)$ 的最大值是 $f(-1)$，最小值是 $f(-2)$ 和 $f(0)$ 中的较小者.

因为 $f(-1)=1$，$f(-2)=-3$，$f(0)=-1$，

所以 函数 $f(x)$ 的值域是 $[-3,1]$. ………………… 12 分

19.（本小题满分 12 分）

解：(1) 依题意 $|PF_1|+|PF_2|=4\sqrt{2}$，$|F_1F_2|=4$，且 $|F_1F_2|<4\sqrt{2}$，

所以 曲线 C 是以 $F_1(-2,0)$，$F_2(2,0)$ 为焦点，长轴长为 $4\sqrt{2}$ 的椭圆. ………………… 2 分

设椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$，其半焦距为 c $(c>0)$.

因为 $2a=4\sqrt{2}$，$2c=4$，$b^2=a^2-c^2=4$，

所以 曲线 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$. ………………… 5 分

(2) 椭圆 C 存在点 M，使得 $\overline{MF_1}\cdot\overline{MF_2}=3$，证明如下： ………………… 6 分

设 $M(x,y)$，则 $\overline{MF_1}=(-2-x,-y)$，$\overline{MF_2}=(2-x,-y)$，

所以 $\overline{MF_1}\cdot\overline{MF_2}=(-2-x)(2-x)+(-y)^2=x^2+y^2-4$. ………………… 8 分

因为 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$，所以 $x^2=8-2y^2$，从而 $\overline{MF_1}\cdot\overline{MF_2}=4-y^2$.

令 $4-y^2=3$，解得 $y=\pm1$.

所以 $x^2=8-2y^2=6$，$x=\pm\sqrt{6}$. ………………… 11 分

故满足题意的点共有四个：$M_1(\sqrt{6},1)$，$M_2(\sqrt{6},-1)$，$M_3(-\sqrt{6},1)$，$M_4(-\sqrt{6},-1)$. ………… 12 分

B卷 [学期综合] 本卷满分 50 分

一、填空题：本大题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分.

1. 173，$\frac{1}{5}$； 2. 350，18； 3. 10；

4. $\frac{5}{8}$； 5. $\frac{1}{\pi}$； 6. $\frac{n(n+3)}{2}$，$2n$.

注：1、2、6 题每空 2 分.

二、解答题：本大题共 2 小题，共 26 分.（如有其它方法，仿此给分）

7.（本小题满分 13 分）

解：（1）$f'(x)=(2x-a)e^x+(x^2-ax-a)e^x=(x+2)(x-a)e^x$. …………………… 3 分

当 $a=1$ 时，$f'(0)=-2$，$f(0)=-1$，

所以 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y-(-1)=-2x$，

即 $2x+y+1=0$. …………………… 5 分

（2）令 $f'(x)=0$，解得 $x=-2$ 或 $x=a$.

① 若 $a\geqslant 2$，则当 $x\in(-2,2)$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 在 $(-2,2)$ 内单调递减，

所以，当 $x=2$ 时，函数 $f(x)$ 取得最小值，最小值为 $f(2)=(4-3a)e^2$. …………………… 7 分

② 若 $-2<a<2$，则当 $x\in(-2,2)$ 时，

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	-2	$(-2,a)$	a	$(a,2)$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$(4+a)e^{-2}$	递减	极小值	递增	$(4-3a)e^2$

所以，当 $x=a$ 时，函数 $f(x)$ 取得最小值，最小值为 $f(a)=-a\cdot e^a$. …………………… 10 分

③ 若 $a\leqslant -2$，则当 $x\in(-2,2)$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 在 $(-2,2)$ 上单调递增，

所以，当 $x=-2$ 时，函数 $f(x)$ 取得最小值，最小值为 $f(-2)=(4+a)e^{-2}$. …………………… 12 分

综上，当 $a\leqslant -2$ 时，$f(x)$ 的最小值为 $(4+a)e^{-2}$；当 $-2<a<2$ 时，$f(x)$ 的最小值为 $-a\cdot e^a$；

当 $a\geqslant 2$ 时，$f(x)$ 的最小值为 $(4-3a)e^2$. …………………… 13 分

8.（本小题满分 13 分）

（1）解：设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的半焦距为 c.

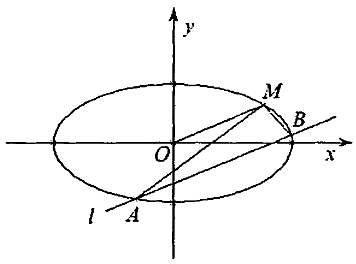
因为椭圆的离心率是 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$， 所以 $\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{a^2-b^2}{a^2}=1-\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{3}{4}$， 即 $a=2b$.　　　　……………………2 分

由 $\begin{cases} a=2b, \\ \dfrac{4}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a^2=8, \\ b^2=2. \end{cases}$

所以椭圆的方程为 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$.　　　　……………………5 分

（2）解：

由 $\begin{cases} y=\dfrac{1}{2}x-1, \\ \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1, \end{cases}$ 消去 y 整理得 $x^2-2x-2=0$.



显然 $\Delta=(-2)^2-4(-2)>0$.

设点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$

则 $x_1+x_2=2$，$x_1x_2=-2$.　　　　……………………8 分

设直线 MA，MB 的斜率分别是 k_1，k_2，$\triangle MAB$ 内切圆的圆心是 I，

则 $k_1+k_2=\dfrac{y_1-1}{x_1-2}+\dfrac{y_2-1}{x_2-2}=\dfrac{(y_1-1)(x_2-2)+(y_2-1)(x_1-2)}{(x_1-2)(x_2-2)}$，

因为 $(y_1-1)(x_2-2)+(y_2-1)(x_1-2)=(\dfrac{1}{2}x_1-2)(x_2-2)+(\dfrac{1}{2}x_2-2)(x_1-2)$

$=x_1x_2-3(x_1+x_2)+8=-2-6+8=0$，　　　　……………………11 分

所以 $\angle AMB$ 的平分线 MI 垂直于 x 轴，

因此 $\triangle MAB$ 的内心的横坐标是 2.　　　　……………………13 分