2015年全国高中数学联赛模拟试题01

第一试

一、填空题：本大题共8小题，每小题8分，共64分.

1. 设 $f_1(x)=-\dfrac{2x+7}{x+3}$， $f_{n+1}(x)=f_1(f_n(x))$， $x\neq-2,x\neq-3$，则 $f_{2013}(2014)=$______.

2. 设 $A=(-2,\ 4)$， $B=\{x\,|\,x^2+ax+4=0,\ x\in\mathbf{R}\}$．若 $A\cap B$ 的非空子集个数为1，则实数 a 的取值范围是________________.

3. 设 R 是满足 $\begin{cases} x\geq 0, \\ y\geq 0, \\ x+y+[x]+[y]\leq 5 \end{cases}$ 的点 (x,y) 构成的区域，则区域 R 的面积为_______.（其中 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数）.

4. 二元函数 $f(x,y)=\sqrt{\cos 4x+7}+\sqrt{\cos 4y+7}+\sqrt{\cos 4x+\cos 4y-8\sin^2 x\sin^2 y+6}$ 的最大值为_____

5. 已知 B 是双曲线 $C:2x^2-4y^2+1=0$ 上靠近点 $A(0,\ m)\ (m>1)$ 的一个顶点．若以点 A 为圆心， $|AB|$ 长为半径的圆与双曲线 C 交于3个点，则 m 的取值范围是______________.

6. 甲、乙两人玩游戏，规则如下：第奇数局，甲赢的概率为 $\dfrac{3}{4}$，第偶数局，乙赢的概率为 $\dfrac{3}{4}$. 每一局没有平局，规定：当其中一人赢的局数比另一人赢的局数多2次时游戏结束. 则游戏结束时，甲乙两人玩的局数的数学期望为________.

7. 设五边形 $ABCDE$ 满足 $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=120^\circ$，则 $\dfrac{AC\cdot BD}{AE\cdot ED}$ 的最小值为________

8. 过正四面体 $ABCD$ 的顶点 A 作一个形状为等腰三角形的截面，且使截面与底面 BCD 所成的角为 75^0. 这样的截面共可作出__________个 .

二、解答题：本大题共3小题，共56分.

9.（本小题满分16分）. 试求实数 a 的取值范围，使得2是不等式 $\dfrac{x+\log_2(2^x-3a)}{1+\log_2 a}>2$ 的最小整数解.

10.（本小题满分20分）、数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 定义为 $a_1=1$， $a_2=4$， $a_n=\sqrt{a_{n-1}a_{n+1}+1}\ (n\geq 2)$.

(1) 求证：数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 为整数列；(2) 求证： $2a_na_{n+1}+1\ (n\geq 1)$ 是完全平方数.

11.（本小题满分20分）已知S,P(非原点)是抛物线 $y=x^2$ 上不同的两点，点P处的切线分别交x，y轴于Q，R.

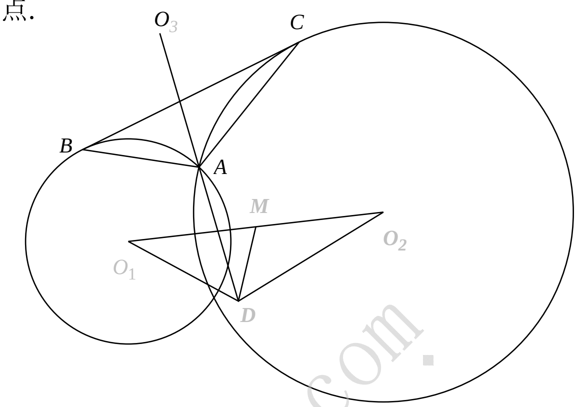
(1)若 $\overrightarrow{PQ}=\lambda\overrightarrow{PR}$，求 λ 的值；(2)若 $\overrightarrow{SP}\perp\overrightarrow{PR}$，求 ΔPSR面积的最小值.

2015年全国高中数学联赛模拟试题01

加试

一、(本小题满分40分)一、如图，设A为$\odot O_1,\odot O_2$的一个交点，直线l切$\odot O_1,\odot O_2$分别于B,C，O_3为ΔABC的外心，O_3关于A的对称点为D，M为O_1O_2的中点.

求证：$\angle O_1DM=\angle O_2DA$.



二、(本小题满分40分)设$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}(n\in N^*)$. 证明:对任意 $m\in N^*$, 存在 $n\in N^*$, 使得$[S_n]=m$.

三、(本小题满分 50 分)试求所有的正整数n，使得存在正整数数列$a_1<a_2<\cdots<a_n$，使得和$a_i+a_j\left(1\le i<j\le n\right)$互不相同，且模4意义下各余数出现的次数相同.

四、(本小题满分50分)集合S是由空间内2014个点构成，满足任意四点不共面. 正整数m满足下列条件：将任意两点连成一条线段，并且在此线段上标上一个$\le m$的非负整数，使得由S中顶点构成的任何一个三角形，一定有两边上的数字是相同的，且这个数字小于第三边上的数字.

试求m的最小值.

2015年全国高中数学联赛模拟试题01

第一试

一、填空题：本大题共8小题，每小题8分，共64分.

1. 设 $f_1(x)=-\dfrac{2x+7}{x+3}$， $f_{n+1}(x)=f_1(f_n(x))$， $x\neq -2, x\neq -3$，则 $f_{2013}(2014)=$______.

解：2014. 注意到 $f_1(x)=-2-\dfrac{1}{x+3}$， $f_2(x)=-2-\dfrac{1}{-2-\dfrac{1}{x+3}+3}=-3-\dfrac{1}{x+2}$，

$$f_3(x)=-3-\frac{1}{-2-\dfrac{1}{x+3}+2}=x.$$ 故 $f_{2013}(2014)=f_3(2014)=2014$.

2. 设 $A=(-2,\ 4)$， $B=\{x\,|\,x^2+ax+4=0,\ x\in\mathbf{R}\}$．若 $A\cap B$ 的非空子集个数为1，则实数 a 的取值范围是________________.

解：由已知得 $A\cap B$ 恰含一个元素．设 $f(x)=x^2+ax+4$，分以下情况讨论：

（1）若 $\Delta=a^2-16=0$，则 $a=\pm 4$，但是当 $a=4$ 时， $f(x)$ 的零点 $-2\notin A$，故应舍去，而 $a=-4$ 经验证满足条件；

（2）若 $\Delta>0$，则根据二次函数图像性质，必有 $f(-2)f(4)\le 0$，即 $(8-2a)(20+4a)\le 0$，解得 $a\ge 4$ 或 $a\le -5$，但 $a=4$ 应舍去，而 $a=-5$ 经验证满足条件.

综上所述，有 $a\in(-\infty,\ -5]\cup\{-4\}\cup(4,\ +\infty)$.

3. 设 R 是满足 $\begin{cases}x\ge 0,\\ y\ge 0,\\ x+y+[x]+[y]\le 5\end{cases}$ 的点 (x,y) 构成的区域，则区域 R 的面积为_______.（其中 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数）.

解：$\dfrac{9}{2}$. 一方面，当 $x+y<3$ 时，有 $[x]+[y]\le x+y<3$，则 $[x]+[y]\le 2$，满足 $x+y+[x]+[y]\le 5$；另一方面，当 $x+y>3$ 时，有 $[x]+[y]+\{x\}+\{y\}>3$，而 $\{x\}+\{y\}<2$，则 $[x]+[y]>1$，从而 $[x]+[y]\ge 2$，于是 $x+y+[x]+[y]>5$，这与条件矛盾. 故区域 R 的面积为 $\dfrac{9}{2}$.

4. 二元函数 $f(x,y)=\sqrt{\cos 4x+7}+\sqrt{\cos 4y+7}+\sqrt{\cos 4x+\cos 4y-8\sin^2 x\sin^2 y+6}$ 的最大值为___.

解：$6\sqrt{2}$. 设 $\cos^2 x=a$， $\cos^2 y=b$，则 $0\le a,b\le 1$. $f=2\sqrt{2}\left(\sqrt{a^2-a+1}+\sqrt{b^2-b+1}+\sqrt{a^2-ab+b^2}\right)$

由 $0\le a,b\le 1$， $a^2\le a$， $\sqrt{a^2-a+1}\le 1$，同理 $\sqrt{b^2-b+1}\le 1$，

$\sqrt{a^2-ab+b^2}\le\sqrt{a-ab+b}=\sqrt{1-(1-a)(1-b)}\le 1$， 故 $f\le 6\sqrt{2}$. 当 $a=b=1$， 或 $a=0,b=1$ 或 $a=1,b=0$ 时， f 取到最大值 $6\sqrt{2}$.

5. 已知 B 是双曲线 $C:2x^2-4y^2+1=0$ 上靠近点 $A(0,\ m)\ (m>1)$ 的一个顶点．若以点 A 为圆心，$|AB|$ 长为半径的圆与双曲线 C 交于3个点，则 m 的取值范围是______________.

解：双曲线 C 的标准方程为 $\dfrac{y^2}{\frac{1}{4}}-\dfrac{x^2}{\frac{1}{2}}=1$，其顶点为 $\left(0,\ \pm\dfrac{1}{2}\right)$， $|AB|=m-\dfrac{1}{2}$，再由

$\begin{cases}x^2+(y-m)^2=|AB|^2,\\ 2x^2-4y^2+1=0\end{cases}$ 得： $6y^2-4my+2m-\dfrac{3}{2}=0$，即 $6\left(y-\dfrac{1}{2}\right)\left(y-\dfrac{2}{3}m+\dfrac{1}{2}\right)=0$.

圆与双曲线交点的纵坐标 y 应满足上述方程，并要求 $y\ge\dfrac{1}{2}$，因此当交点有3个时，应使 $y_1=\dfrac{1}{2}$ 对应一个交点，而 $y_2=\dfrac{2}{3}m-\dfrac{1}{2}>\dfrac{1}{2}$ 对应两个交点，从而 $m>\dfrac{3}{2}$.

6. 甲、乙两人玩游戏，规则如下：第奇数局，甲赢的概率为$\frac{3}{4}$，第偶数局，乙赢的概率为$\frac{3}{4}$. 每一局没有平局，规定：当其中一人赢的局数比另一人赢的局数多 2 次时游戏结束. 则游戏结束时，甲乙两人玩的局数的数学期望为________.

解：$\frac{16}{3}$. 设游戏结束时，甲乙两人玩的局数的数学期望为E，则$E=\frac{3}{8}\times 2+\frac{5}{8}\times\left(E+2\right)$，解得$E=\frac{16}{3}$.

7. 设五边形$ABCDE$满足$\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=120^\circ$，则$\frac{AC\cdot BD}{AE\cdot ED}$的最小值为________

解：$\frac{3}{4}$ 延长AB与DC相交于点H，延长EA与CB相交于点F，延长ED与BC相交于点G.

则$\Delta AFB,\Delta DCG,\Delta BCH$均为正三角形. 设$AB=x$，$BC=y$，$CD=z$. 容易得到四边形$EAHD$为平行四边形，则$EA=HD=y+z$. 在$\Delta ABC$中，由余弦定理，$AC=\sqrt{x^2+y^2+xy}$，于是$\frac{AC}{AE}=\frac{\sqrt{x^2+y^2+xy}}{y+z}$.

同理，$\frac{BD}{ED}=\frac{\sqrt{y^2+z^2+yz}}{x+y}$. 故$\frac{AC\cdot BD}{AE\cdot ED}=\frac{\sqrt{x^2+y^2+xy}}{y+z}\cdot\frac{\sqrt{y^2+z^2+yz}}{x+y}$.

注意到，$\sqrt{x^2+y^2+xy}\ge\frac{\sqrt{3}}{2}(x+y)\Leftrightarrow(x-y)^2\ge 0$. 有$\frac{AC\cdot BD}{AE\cdot ED}=\frac{\sqrt{x^2+y^2+xy}}{x+y}\cdot\frac{\sqrt{y^2+z^2+yz}}{y+z}\ge\frac{3}{4}$.

等号当且仅当$x=y=z$成立故最小值为$\frac{3}{4}$.

8. 过正四面体$ABCD$的顶点A作一个形状为等腰三角形的截面，且使截面与底面BCD所成的角为75^0. 这样的截面共可作出__________个 .

答案：18. 设正ΔBCD中心为O，以O为圆心，$\frac{\sqrt{6}}{3}\cot 75^\circ$为半径作圆. 则圆$O$在$\Delta BCD$的内部，且所求截面与平面$BCD$的交线是该圆的切线. 有三种情况：(1) 切线与$\Delta BCD$的一边平行时，有 6 个这样的截面；(2) 切线$B_1C_1$（其中$B_1$在边$BC$上，$C_1$在边$CD$上）且$CB_1=C_1D$，则截面$\Delta AB_1C_1$为等腰三角形. 这样的截面有 6 个；(3) 作$BE$切圆$O$，交$CD$于$E$，由$\Delta BCE\sim\Delta ACE$，有$BE=AE$，对应$\Delta ABE$是等腰三角形，这样的截面共有 6 个. 故满足条件的截面共有 18 个.

二、解答题：本大题共 3 小题，共 56 分.

9.（本小题满分 16 分）. 试求实数a的取值范围，使得2是不等式$\frac{x+\log_2(2^x-3a)}{1+\log_2 a}>2$的最小整数解.

解：首先 $2^x-3a>0$，$a>0$，且$a\ne\frac{1}{2}$. 原不等式等价于 $\frac{\log_2\frac{2^x-3a}{a^2}+x-2}{1+\log_2 a}>0$.

（1）当$1+\log_2 a>0$，即$a>\frac{1}{2}$时，有$\log_2\frac{2^x-3a}{a^2}+x-2>0$，整理有 $2^{2x}-3a\cdot 2^x-4a^2>0$.

解得$2^x>4a$，$2^x<-a$（舍去）. 从而$x>\log_2 4a$. 注意到当$a>\frac{1}{2}$时，$\log_2 4a>1$.

故要使2是不等式$\frac{x+\log_2(2^x-3a)}{1+\log_2 a}>2$的最小整数解，有$\log_2 4a<2$，解得$a<1$，于是 $\frac{1}{2}<a<1$.

（2）当$1+\log_2 a<0$，即$0<a<\frac{1}{2}$时，注意到$4-3a>4-\frac{3}{2}>2$，有$\frac{2+\log_2(2^2-3a)}{1+\log_2 a}<0$不合题设条件.

即$0<a<\frac{1}{2}$不满足条件. 综上所述，a的取值范围为$(\frac{1}{2},1)$.

10.（本小题满分 20 分）、数列$\left\{a_n\right\}_{n\ge1}$定义为$a_1=1$，$a_2=4$，$a_n=\sqrt{a_{n-1}a_{n+1}+1}\left(n\ge 2\right)$.

⑴ 求证：数列$\left\{a_n\right\}_{n\ge1}$为整数列；⑵ 求证：$2a_na_{n+1}+1\left(n\ge1\right)$是完全平方数.

证明：⑴ 定义 $a_0=0$．当 $n\ge 1$ 时，$a_n^2=a_{n-1}a_{n+1}+1$，$a_{n+1}^2=a_na_{n+2}+1$，两式相减，整理得：$a_{n+1}\left(a_{n+1}+a_{n-1}\right)=a_n\left(a_{n+2}+a_n\right)$，即 $\dfrac{a_{n+2}+a_n}{a_{n+1}}=\dfrac{a_{n+1}+a_{n-1}}{a_n}\left(\forall n\ge 1,a_n\ne 0\right)$．

因此 $\dfrac{a_{n+2}+a_n}{a_{n+1}}=\dfrac{a_{n+1}+a_{n-1}}{a_n}=\dfrac{a_n+a_{n-2}}{a_{n-1}}=\cdots=\dfrac{a_2+a_0}{a_1}=4$．故 $a_{n+2}=4a_{n+1}-a_n$．（$n\ge 1$）

由此二阶递推式及 $a_1=1$，$a_2=4$，容易得到数列 $\left\{a_n\right\}_{n\ge 1}$ 为整数列.

⑵ 对 $n\ge 1$，$0=a_{n+1}\left(a_{n+1}-4a_n+a_{n-1}\right)=a_{n+1}^2-4a_{n+1}a_n+a_{n+1}a_{n-1}$

$=a_{n+1}^2-4a_{n+1}a_n+a_n^2-1=\left(a_{n+1}-a_n\right)^2-\left(2a_na_{n+1}+1\right)$．因此 $2a_na_{n+1}+1=\left(a_{n+1}-a_n\right)^2$．故命题得证！

11.（本小题满分 20 分）已知 S,P(非原点)是抛物线 $y=x^2$ 上不同的两点,点 P 处的切线分别交 x,y 轴于 Q,R.

(1)若 $\overrightarrow{PQ}=\lambda\overrightarrow{PR}$,求 λ 的值;(2)若 $\overrightarrow{SP}\perp\overrightarrow{PR}$,求ΔPSR 面积的最小值.

解: (1)设过 $P(x_1,y_1)$,则 P 处的切线 $2x_1x=y_1+y$, $Q(\dfrac{y_1}{2x_1},0)$,

$$\overrightarrow{PQ}=(\frac{y_1}{2x_1}-x_1,-y_1)=\lambda\overrightarrow{PR}=\lambda(-x_1,-2y_1)\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{y_1}{2x_1}-x_1=-\lambda x_1\\ -y_1=-2\lambda y_1\end{cases}\Rightarrow\lambda=\frac{1}{2}.$$

(2)设 $S(x_2,y_2)$,则 $\overrightarrow{SP}\perp\overrightarrow{PR}\Leftrightarrow(x_1-x_2,x_1{}^2-x_2{}^2)(-x_1,-2x_1{}^2)=0$

$$\Leftrightarrow x_1(x_1-x_2)+2x_1{}^2(x_1{}^2-x_2{}^2)=0\Leftrightarrow x_1(x_1+x_2)=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x_2=-x_1-\frac{1}{2x_1}.$$

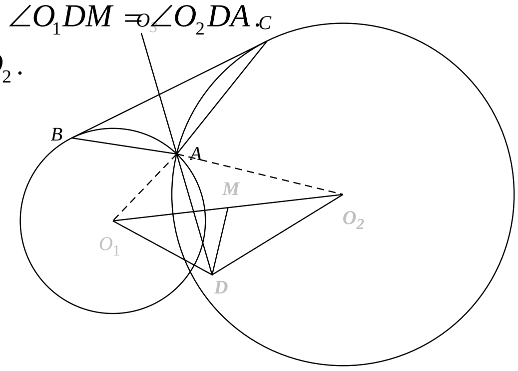
$$|\overrightarrow{SP}|=|x_1-x_2|\sqrt{1+\frac{1}{4x_1{}^2}}=|2x_1+\frac{1}{2x_1}|\sqrt{1+\frac{1}{4x_1{}^2}},\ |\overrightarrow{PR}|=\sqrt{x_1{}^2+4x_1{}^2}=|x_1|\sqrt{1+4x_1{}^2},$$

所以, $S=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(4x_1{}^2+1)^2}{4x_1}=2x_1{}^3+x_1+\dfrac{1}{8x_1}$,令 $S=2x^3+x+\dfrac{1}{8x}(x>0)$,则 $S'=6x^2+1-\dfrac{1}{8x^2}>0$

$\Leftrightarrow x^2>\dfrac{1}{12},S'<0\Leftrightarrow x^2<\dfrac{1}{12}$,所以,当 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ 时, $S_{\min}=\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$.

加试

一、（本小题满分 40 分）一、如图，设 A 为 $\odot O_1,\odot O_2$ 的一个交点，直线 l 切 $\odot O_1,\odot O_2$ 分别于 B,C，O_3 为 ΔABC 的外心，O_3 关于 A 的对称点为 D，M 为 O_1O_2 的中点.求证：$\angle O_1DM=\angle O_2DA$.



证明：易得 O_3O_1 是 AB 的中垂线，O_3O_2 是 AC 的中垂线.连接 AO_1,AO_2.

则 $\angle O_3O_1A=\dfrac{1}{2}\angle BO_1A=\angle CBA$，$\angle O_1O_3A=\dfrac{1}{2}\angle BO_3A=\angle BCA$，

故 $\Delta O_3O_1A\sim\Delta CBA$.同理，$\Delta O_3O_2A\sim\Delta BCA\sim\Delta O_1O_3A$.

做 $\Delta O_3O_1O_2$ 的外接圆 Γ，设 O_3A 交 $\odot\Gamma$ 于另一点 E，

则 $\angle EO_1O_2=\angle AO_3O_2=\angle AO_1O_3$，$\angle EO_2O_1=\angle AO_3O_1=\angle AO_2O_3$，

故 $\Delta O_1EO_2\sim\Delta O_1AO_3\sim\Delta O_3AO_2$.从而 $\dfrac{O_1O_3}{O_1O_2}=\dfrac{O_3A}{EO_2}$，$\dfrac{O_2O_3}{O_1O_2}=\dfrac{O_3A}{EO_1}$，

因此 $O_3A\cdot O_1O_2=O_1O_3\cdot EO_2=O_3O_2\cdot EO_1$，

由托勒密定理，$O_3A\cdot O_1O_2=\dfrac{1}{2}\left(O_1O_3\cdot EO_2+O_3O_2\cdot EO_1\right)=\dfrac{1}{2}O_3E\cdot O_1O_2$，所以 $O_3A=\dfrac{1}{2}O_3E$，从而 E 与 D 重合.再由 $MO_2\cdot O_3D=\dfrac{1}{2}\left(O_1O_3\cdot EO_2+O_3O_2\cdot O_1E\right)=O_1O_3\cdot O_2D$，知道 $\Delta O_3O_1D\sim\Delta O_2MD$.

所以，$\angle O_2DM=\angle O_1DO_3$.故 $\angle O_1DM=\angle O_2DA$.

二、(本小题满分 40 分)设 $S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}(n\in N^*)$. 证明:对任意 m∈N*, 存在 n∈N*, 使得[S_n]=m.

证明:当 m=1 时, [S_1]=1;当 m=2 时, [S_4]=2;当 m⩾3 时, 对满足 0⩽*a*<*b*⩽1 的任意实数 *a*, *b*, 令 $N_0=\left[\frac{1}{b-a}\right]+1$,

则 $N_0>\frac{1}{b-a}$. 对∀ 正整数 m>S_{N_0} 和∀ 正整数 k>N_0, 若都 $S_{k-1}\le m+a, S_k\ge m+b$, 则 $S_k-S_{k-1}\ge b-a$. 但 k>N_0 时 $S_k-S_{k-1}=\frac{1}{k}<\frac{1}{N_0}<b-a$, 矛盾!. 故对任意正整数 m>$S_{N_0}$ 总存在正整数 n, 使得 n>N_0 时有

$m\le m+a<S_n<m+b\le m+1$. 所以[S_n]=m.

三、(本小题满分 50 分)试求所有的正整数 n,使得存在正整数数列 $a_1<a_2<\cdots<a_n$,使得和 $a_i+a_j\left(1\le i<j\le n\right)$ 互不相同,且模 4 意义下各余数出现的次数相同.

解:所求的 n 为 k^4,其中 k 为正整数.我们用 m_i 表示 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中模 4 余 i 的个数, $i=1,2,3,4$.注意到,若 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足题设条件,则 $a_1+1,a_2+1,\cdots,a_n+1$ 也满足题设条件,故可不妨设 $m_1+m_3\ge m_2+m_4$.

记 $T=\frac{1}{4}C_n^2$,考察 $a_i+a_j\left(i<j\right)$ 模 4 不同类中的项数,有 $\begin{cases}C_{m_1}^2+C_{m_3}^2+m_2m_4=T\\C_{m_2}^2+C_{m_4}^2+m_1m_3=T\\m_1m_4+m_2m_3=T\\m_1m_2+m_3m_4=T\end{cases}$ ……(*)

所以 $2T=\left(m_1+m_3\right)\left(m_2+m_4\right)=C_{m_1+m_3}^2+C_{m_2+m_4}^2$ 故 $\left(m_1+m_3\right)+\left(m_2+m_4\right)=\left(\left(m_1+m_3\right)-\left(m_2+m_4\right)\right)^2$.

令 $k=\left(m_1+m_3\right)-\left(m_2+m_4\right)\ge 0$,则有 $m_1+m_3=\frac{k^2+k}{2}$, $m_2+m_4=\frac{k^2-k}{2}$, $n=k^2$.另一方面,由(*)知,$\left(m_1-m_3\right)\left(m_2-m_4\right)=0$,$\left(m_1-m_3\right)^2=\left(m_2-m_4\right)^2+k$,由于 n 为正整数,则 $k\ge 1$,从而 $m_2-m_4=0$,且 $\left(m_1-m_3\right)^2=k$,令 $l=\left|m_1-m_3\right|$,则 $k=l^2$, $m_2=m_4=\frac{l^4-l^2}{4}$,$\left(m_1,m_3\right)=\left(\frac{l^4+l^2+2l}{4},\frac{l^4+l^2-2l}{4}\right)$ 或 $\left(\frac{l^4+l^2-2l}{4},\frac{l^4+l^2+2l}{4}\right)$,满足条件(*).故 $n=k^2=l^4$ 满足题设条件.

综上所述,所求的 n 为 k^4,其中 k 为正整数.

四、解:考虑一般情形,集合 S 由 $n\ge 4$ 个点构成,满足任意四点不共面.正整数 m 满足条件:在任意线段上标上一个 $\le m$ 的非负整数,使得由 S 中顶点构成的任何一个三角形,一定有两边上的数字是相同的,且这个数字小于第三边上的数字. 记 r 为线段上被标数字不同的数目,则 $r\le m+1$.下面我们用数学归纳法证明:$r\ge\log_2 n$.当 $n=4$ 时,结论平凡;对 $n>4$,取标上数字最小的边 AB,记为数字 d.任取异于 A,B 的点 $C\in S$,则 AC 或 BC 边上的数字恰有一个为 d.记 $P=\left\{C\mid AC=d,C\in S\right\}\bigcup\left\{A\right\}$, $Q=\left\{C\mid BC=d,C\in S\right\}\bigcup\left\{B\right\}$.

不妨设 $\left|P\right|\ge\frac{n}{2}$.由归纳假设知,对 P 中被标数字的数目 $\ge\log_2\frac{n}{2}=\log_2 n-1$,因为 d 是被标记数字中最小的,故 $r\ge\left(\log_2 n-1\right)+1=\log_2 n$.故结论成立.特别地,当 $n=2014$ 时,有 $r\ge\log_2 2014$,从而 $r\ge 11$.

从而 $m\ge 10$.下证,m 的最小值为 10.记这 2014 个点分别为 $1,2,\cdots,2014$,我们标记线段 $ij(i>j)$ 上的数字为 t,其中 t 为满足 $2^t\mid i-j$ 的最大非负整数.因为 $i,j\le 2014$,所以 $t\le 10$.现设 i,j,k 为任意不同的三点,若线段 ij,ik 被标记为同一数字 s,则 $i-j=2^s a$, $i-k=2^s b$,这里 a,b 均为奇数,于是 $j-k=\left(i-k\right)-\left(j-k\right)=2^s(b-a)$,由于 $b-a$ 为偶数,知线段 jk 上标记的数字大于 s,满足题设条件;若线段 ij,ik 标记为不同的数字 $t,s(t<s)$,则 $i-j=2^t a$, $i-k=2^s b$,这里 a,b 均为奇数,于是 $j-k=\left(i-k\right)-\left(j-k\right)=2^t(2^{s-t}b-a)$,由于 $2^{s-t}b-a$ 为奇数,知线段 jk 上标记的数字为 t,满足题设条件.

综上所述,m 的最小值为 10.