2015年上海市高中数学竞赛试卷

2015年3月29日上午9：30～11：30

【说明】**解答本试卷不得使用计算器．解答请写在答题纸上．**

一、填空题（本题满分60分，前4小题每小题7分，后4小题每小题8分）

1． 等差数列$\{a_n\}$中，对任意正整数n，都有$a_{n+1}+a_n=4n-58$，则$a_{2015}=$______．

2．对整数$n\geq 3$，记$f(n)=\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\cdots\cdot\log_{n-1}n$，则 $f(2^2)+f(2^3)+\cdots+f(2^{10})=$ ___________．

3． 有10个大小相同的小球，其中5个是红球，5个是白球．现将这10个球任意排成一排，并从左至右依次编号为1，2，…，10. 则红球的编号数之和大于白球的编号数之和的排法共有_________种．

4. 在直角坐标平面xOy上，圆$O:x^2+y^2=1$，圆$O_1:(x-3)^2+y^2=4$．过x轴的左半轴上一点M作圆O的切线，与圆O相切于点A，与圆O_1分别相交于点B,C，若$AB=BC$，则点M的坐标为___________．

5． 已知$\cos(\theta+\frac{\pi}{4})<3(\sin^5\theta-\cos^5\theta),\ \theta\in[-\pi,\pi]$，则$\theta$的取值范围是_______．

6. 投掷两次骰子，设第一次出现的点数为a，第二次出现的点数为b，则使得关于x的二次方程$x^2+ax+b=0$有两个小于-1的不相等实根的概率为_______．（用数字作答）

7． 已知集合
$A=\{(x,y)\mid x=m,y=-3m+2,m\in N^*\}$，$B=\{(x,y)\mid x=n,y=a(a^2-n+1),n\in N^*\}$，则使得$A\cap B\neq\varnothing$的整数$a$共有___________个．

8. 若实数x,y满足$x-3\sqrt{x+1}=3\sqrt{y+2}-y$，则$x+y$的最大值为_________．

二、解答题

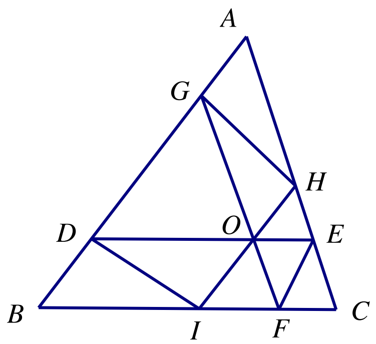
9．（本题满分 14 分）在直角坐标平面xOy上，已知点A,B在双曲线$C:2x^2+4x-y^2=0$上，且使得$\triangle OAB$是以O为直角顶点的等腰直角三角形，求所有这样的$\triangle OAB$的个数．

10．（本题满分 14 分）已知 p 为素数，n 为正整数．非负整数 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 均小于 p，且满足

$$\begin{cases} a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n=13, \\ a_0+a_1p+a_2p^2+\cdots+a_np^n=2015. \end{cases}$$

求素数 p .

11．（本题满分 16 分）如图，已知△ ABC 的面积为 1，过△ ABC 内一点 O 分别引三条边的平行线 DE, FG, HI ，点 D, E, F, G, H, I 均在△ ABC 的边上，求六边形 $DGHEFI$ 的面积的最小值．



12．（本题满分 16 分）设 n 是正整数，数列 A: $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是由数 0 或 1 组成的数列，即 $a_k=0$ 或 $1\,(1\le k\le n)$.

（1）若 $n\ge 3$，由数列 A 定义另一个数列 A' : $a_1', a_2', \cdots, a_n'$，其中

$$a_k'=\begin{cases} 0, & \text{若}\ a_{k-1}=a_{k+1}, \\ 1, & \text{若}\ a_{k-1}\ne a_{k+1}, \end{cases} \quad k=1,2,\cdots,n,$$

这里 $a_0=a_n,\ a_{n+1}=a_1$.

求使得 $a_k+a_k'=1,\ k=1,2,\cdots,n$ 的所有数列 A .（本小题只需写出结果，不需解题过程）

（2）求使得 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 除以 4 余 3 的数列 A 的个数．

2015年上海市高中数学竞赛答案

一、填空题（本题满分60分，前4小题每小题7分，后4小题每小题8分）

1．4000．　　2．54．

3．126．　　4．$(-4,\ 0)$．

5．$\left[-\pi,-\dfrac{3\pi}{4}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{4},\pi\right]$．　　6．$\dfrac{1}{12}$．

7．10．　　8．$9+3\sqrt{15}$．

二、解答题

9．（本题满分 14 分）在直角坐标平面 xOy 上，已知点 A,B 在双曲线 $C:2x^2+4x-y^2=0$ 上，且使得△OAB 是以 O 为直角顶点的等腰直角三角形，求所有这样的△OAB 的个数．

解　设 l_{OA}： $y=kx\,(k\neq 0)$，则 $l_{OB}:y=-\dfrac{1}{k}x$．由

$$\begin{cases} y=kx, \\ 2x^2+4x-y^2=0 \end{cases}$$

得
$$\left(2-k^2\right)x^2+4x=0,$$

所以 $2-k^2\neq 0$， $x_A=\dfrac{4}{k^2-2}$，于是 $|OA|=\sqrt{1+k^2}\left|\dfrac{4}{k^2-2}\right|$．　　………4分

同理可得，$|OB|=\sqrt{1+(\dfrac{1}{k})^2}\left|\dfrac{4}{(\dfrac{1}{k})^2-2}\right|=\sqrt{1+k^2}\left|\dfrac{4k}{2k^2-1}\right|$．　　………6分

因为△OAB 是以 O 为直角顶点的等腰直角三角形，所以 $|OA|=|OB|$，于是

$$\sqrt{1+k^2}\left|\frac{4}{k^2-2}\right|=\sqrt{1+k^2}\left|\frac{4k}{2k^2-1}\right|,$$

所以
$$\frac{1}{k^2-2}=\pm\frac{k}{2k^2-1}.$$

若 $\dfrac{1}{k^2-2}=\dfrac{k}{2k^2-1}$，则 $k^3-2k^2-2k+1=0$，即 $(k+1)(k^2-3k+1)=0$，解得

$k_1=-1,\ k_2=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2},k_3=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$．　　………………10分

若$\frac{1}{k^2-2}=-\frac{k}{2k^2-1}$，则$k^3+2k^2-2k-1=0$，即$(k-1)(k^2+3k+1)=0$，解得

$k_4=1, k_5=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}, k_6=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$. ··················12 分

因为$k_1\cdot k_4=k_2\cdot k_5=k_3\cdot k_6=-1$，所以由$k_1$和$k_4$得到的两个三角形是相同的，同样，由$k_2$和$k_5$得到的两个三角形是相同的，$k_3$和$k_6$得到的两个三角形也是相同的.

综上所述，满足题意的△ABC共有 3 个. ··················14 分

10．（本题满分 14 分）已知p为素数，n为正整数．非负整数$a_0,a_1,\cdots,a_n$均小于p，且满足

$$\begin{cases}a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n=13,\\ a_0+a_1p+a_2p^2+\cdots+a_np^n=2015.\end{cases}$$

求素数p.

解 由题设可得

$$a_1(p-1)+a_2(p^2-1)+\cdots+a_n(p^n-1)=2002,$$

于是$p-1$是$2002=2\times7\times11\times13$的正约数. ··················4 分

若$p=2$，则$\left(a_n\cdots a_1a_0\right)_2$ 是2015的二进制表示，因为

$$2015=\left(11111011111\right)_2,$$

而$1+1+1+1+1+0+1+1+1+1+1=11\neq13$，矛盾. ··················6 分

若$p>2$，则p是奇数，于是$p-1$是偶数，

$$p-1=2\times7, 2\times11, 2\times13, 2\times7\times11, 2\times7\times13, 2\times11\times13, 2\times7\times11\times13,$$

又p是素数，故p只可能是$3, 23, 2003$. ··················8 分

若$p=3$，则$\left(a_n\cdots a_1a_0\right)_3$ 是2015的三进制表示，因为$2015=\left(2202122\right)_3$，而$2+2+1++2+0+2+2=11\neq13$，矛盾. ··················10 分

若$p=23$，则$\left(a_n\cdots a_1a_0\right)_{23}$ 是2015的23进制表示，因为

$$2015=3\times23^2+18\times23+14,$$

而$14+18+3\neq13$，矛盾. ··················12 分

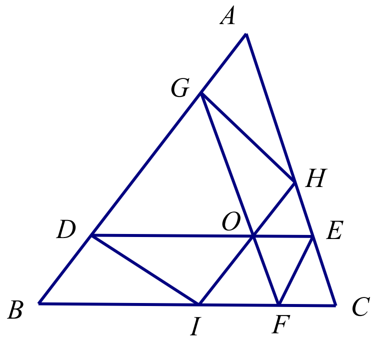
若 $p=2003$，则 $\left(a_n\cdots a_1a_0\right)_{2003}$ 是2015的2003进制表示，因为

$$2015=1\times 2003+12,$$

而 $1+12=13$，满足题设条件.

综上所述，欲求的素数 p 为2003.　　　　…………………14 分

11.（本题满分 16 分）如图，已知△ABC 的面积为 1，过△ABC 内一点 O 分别引三条边的平行线 DE,FG,HI，点 D,E,F,G,H,I 均在△ABC 的边上，求六边形 $DGHEFI$ 的面积的最小值.



解　由题设，四边形 $AGOH$，四边形 $BIOD$，四边形 $CEOF$ 均为平行四边形.

又由题设知，$\triangle GDO\backsim\triangle ABC$，$\triangle OIF\backsim\triangle ABC$，$\triangle HOE\backsim\triangle ABC$，而相似三角形的面积比等于相似比的平方，于是

$$\frac{S_{\Delta GDO}}{S_{\Delta ABC}}+\frac{S_{\Delta OIF}}{S_{\Delta ABC}}+\frac{S_{\Delta HOE}}{S_{\Delta ABC}}=\left(\frac{DO}{BC}\right)^2+\left(\frac{IF}{BC}\right)^2+\left(\frac{OE}{BC}\right)^2$$

$$=\left(\frac{BI}{BC}\right)^2+\left(\frac{IF}{BC}\right)^2+\left(\frac{FC}{BC}\right)^2$$

$$\geq\frac{1}{3}\left(\frac{BI}{BC}+\frac{IF}{BC}+\frac{FC}{BC}\right)^2=\frac{1}{3},$$

从而

$$S_{\Delta GDO}+S_{\Delta OIF}+S_{\Delta HOE}\geq\frac{1}{3}.$$

…………………10 分

所以

$$S_{\Delta AGH}+S_{\Delta BID}+S_{\Delta CEF}=\frac{1}{2}\left(S_{AGOH}+S_{BIOD}+S_{CEOF}\right)$$

$$=\frac{1}{2}(S_{\Delta ABC}-(S_{\Delta GDO}+S_{\Delta OIF}+S_{\Delta HOE}))\leq\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3})=\frac{1}{3},$$

故

$$S_{DGHEFI}=S_{\Delta ABC}-(S_{\Delta AGH}+S_{\Delta BID}+S_{\Delta CEF})$$

$$\geq 1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3},$$

…………………14 分

当 O 为△ABC 的重心时，上述不等式等号成立．所以，六边形 $DGHEFI$ 的面积的最小值为 $\frac{2}{3}$.　　　　…………………16 分

12．（本题满分 16 分）设n是正整数，数列$A: a_1, a_2, \cdots, a_n$是由数 0 或 1 组成的数列，即$a_k = 0$或$1 (1 \le k \le n)$．

（1）若$n \ge 3$，由数列A定义另一个数列$A': a_1', a_2', \cdots, a_n'$，其中

$$a_k' = \begin{cases} 0, & 若 a_{k-1} = a_{k+1}, \\ 1, & 若 a_{k-1} \ne a_{k+1}, \end{cases} \quad k = 1, 2, \cdots, n,$$

这里$a_0 = a_n,\ a_{n+1} = a_1$．

求使得$a_k + a_k' = 1,\ k = 1, 2, \cdots, n$的所有数列$A$．（本小题只需写出结果，不需解题过程）

（2）求使得$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$除以 4 余 3 的数列A的个数.

解 （1）数列A: $1, 1, \cdots, 1$；当n是3的倍数时，数列A还有如下三个解：

A: $0, 1, 0, 0, 1, 0, \cdots, 0, 1, 0$；　　A: $0, 0, 1, 0, 0, 1, \cdots, 0, 0, 1$；

A: $1, 0, 0, 1, 0, 0, \cdots, 1, 0, 0$．

………………4 分

（2）设x_n, y_n, z_n, u_n分别表示$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$除以4余数为$0, 1, 2, 3$的数列A的个数．x_n其实表示$a_1, a_2, \cdots, a_n$中有0个1，4个1，…的数列A的个数，于是$x_n = C_n^0 + C_n^4 + \cdots$．同理，$y_n = C_n^1 + C_n^5 + \cdots$，$z_n = C_n^2 + C_n^6 + \cdots$，$u_n = C_n^3 + C_n^7 + \cdots$．

………………6 分

因为

$$(1+\mathrm{i})^n = C_n^0 + \mathrm{i}C_n^1 + \mathrm{i}^2 C_n^2 + \cdots + \mathrm{i}^n C_n^n = x_n + \mathrm{i}y_n - z_n - \mathrm{i}u_n,$$

$$(1-\mathrm{i})^n = x_n - \mathrm{i}y_n - z_n + \mathrm{i}u_n,$$

所以

$$y_n - u_n = \frac{(1+\mathrm{i})^n - (1-\mathrm{i})^n}{2\mathrm{i}}.$$

又

$$y_n + u_n = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots = 2^{n-1},$$

所以

$$u_n = 2^{n-2} - \frac{(1+\mathrm{i})^n - (1-\mathrm{i})^n}{4\mathrm{i}}.$$

………………12 分

注意到

$$(1+\mathrm{i}) - (1-\mathrm{i}) = 2\mathrm{i},\quad (1+\mathrm{i})^2 - (1-\mathrm{i})^2 = 4\mathrm{i},$$

$$(1+\mathrm{i})^3-(1-\mathrm{i})^3=4\mathrm{i}，(1+\mathrm{i})^4-(1-\mathrm{i})^4=0，$$

及 $$(1+\mathrm{i})^{k+4}-(1-\mathrm{i})^{k+4}=-4\left[(1+\mathrm{i})^k-(1-\mathrm{i})^k\right],\ k=1,\ 2,\cdots，$$

所以

$$(1+\mathrm{i})^n-(1-\mathrm{i})^n=\begin{cases}(-4)^{k-1}\cdot 2\mathrm{i}, & 若 n=4k-3,\\ (-4)^{k-1}\cdot 4\mathrm{i}, & 若 n=4k-2,\\ (-4)^{k-1}\cdot 4\mathrm{i}, & 若 n=4k-1,\\ 0, & 若 n=4k,\end{cases}\qquad k=1,2,\cdots.$$

于是有

$$u_n==\begin{cases}2^{4k-5}-(-1)^{k-1}\cdot 2^{2k-3}, & 若 n=4k-3,\\ 2^{4k-4}-(-1)^{k-1}\cdot 2^{2k-2}, & 若 n=4k-2,\\ 2^{4k-3}-(-1)^{k-1}\cdot 2^{2k-2}, & 若 n=4k-1,\\ 2^{4k-2}, & 若 n=4k.\end{cases}$$

………………16 分