北京市顺义区 2014 届高三第一次统练考试

数学（理）试题

本试卷共 4 页，150 分.考试时长 120 分钟.考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效.考试结束后将答题卡交回.

第一部分（选择题　共 40 分）

一. 选择题共 8 个小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,选出符合题目要求的一项.

1. 已知集合 $A=\{x|-3\le x<1\}$, $B=\{x|x\le 2\}$,则集合 $A\cup B=$

A. $\{x|-3\le x<1\}$　B. $\{x|-3\le x\le 2\}$　C. $\{x|x<1\}$　D. $\{x|x\le 2\}$

2.在极坐标系中，过点 $(2,\dfrac{\pi}{3})$ 且垂直于极轴的直线方程为

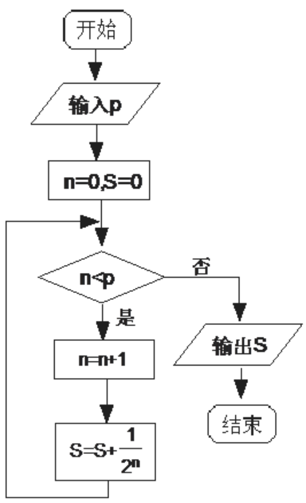
A. $\rho\sin\theta=-1$.　B $\rho\sin\theta=1$　C. $\rho\cos\theta=-1$　D. $\rho\cos\theta=1$

3. 执行右边的程序框图，若 $p=5$，

则输出的 S 值为

A. $\dfrac{7}{8}$　B. $\dfrac{15}{16}$

C. $\dfrac{31}{32}$　D. $\dfrac{63}{64}$



4. 已知向量 $\vec{a}=(2,1)$，　$\vec{a}+\vec{b}=(1,k^2-1)$，则 $k=2$ 是 $\vec{a}\perp\vec{b}$ 的

(A)充分不必要条件　(B) 必要不充分条件
(C)充分必要条件　(D)既不充分也不必要条件

5.将 4 名学生分配到甲、乙、丙 3 个实验室准备实验，每个实验室至少分配 1 名学生的不同分配方案共有

A. 12 种　　B 24 种　　C. 36 种　　D. 48 种

6.已知函数 $f(x)=\cos(2x+\frac{\pi}{3})-\cos 2x$，其中 $x\in R$，给出下列四个结论

①.函数 $f(x)$ 是最小正周期为 π 的奇函数；

②.函数 $f(x)$ 图象的一条对称轴是 $x=\frac{2\pi}{3}$；

③.函数 $f(x)$ 图象的一个对称中心为 $(\frac{5\pi}{12},0)$；

④.函数 $f(x)$ 的递增区间为 $\left[k\pi+\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{2\pi}{3}\right]$，$k\in Z$.

则正确结论的个数是

(A) 1 个　　(B) 2 个　　(C) 3 个　　(D) 4 个

7.已知 $a>0$ 且 $a\neq 1$，函数 $f(x)=\begin{cases}(a-1)x+3a-4,(x\le 0)\\ a^x,(x>0)\end{cases}$ 满足对任意实数 $x_1\neq x_2$，都有 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0$ 成立，则 a 的取值范围是

（A）$(0,1)$　　（B）$(1,+\infty)$　　（C）$\left(1,\frac{5}{3}\right]$　　（D）$\left[\frac{5}{3},2\right)$

8.设非空集合 M 同时满足下列两个条件：

① $M\subseteq\{1,2,3,\cdots\cdots,n-1\}$；

②若 $a\in M$，则 $n-a\in M$，$(n\ge 2,n\in N^{+})$.则下列结论正确的是

（A）若 n 为偶数，则集合 M 的个数为 $2^{\frac{n}{2}}$ 个；

（B）若 n 为偶数，则集合 M 的个数为 $2^{\frac{n}{2}}-1$ 个；

（C）若 n 为奇数，则集合 M 的个数为 $2^{\frac{n-1}{2}}$ 个；

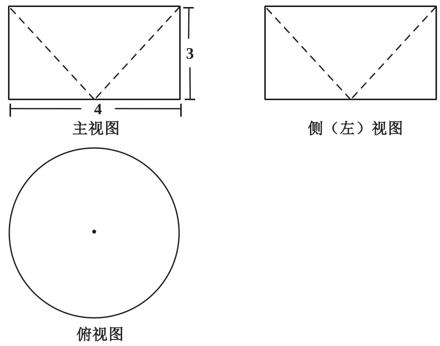
（D）若 n 为奇数，则集合 M 的个数为 $2^{\frac{n+1}{2}}$ 个.

二.填空题(本大题共 6 个小题,每小题 5 分,共 30 分)

9. 已知i为虚数单位，在复平面内复数$\dfrac{2i}{1+i}$对应点的坐标为 ________.

10.一个几何体的三视图如图所示，

则这个几何体的体积是________.



11. $(\sqrt{x}-\dfrac{1}{x})^6$ 的展开式中，常数项是________.

12.已知抛物线$y^2=2px$（$p>0$）的焦点为F，准线为l，P为抛物线上一点，$PA\perp l$，垂足为A.如果$\triangle APF$是边长为4的正三角形，则此抛物线的焦点坐标为________,点P的横坐标$x_P=$______.

13. 设x,y满足约束条件$\begin{cases}4x-3y+4\ge 0\\4x-y-4\le 0\\x\ge 0\\y\ge 0\end{cases}$,若目标函数$z=ax+by$ $(a>0,b>0)$的最大值为8，则ab的最大值为 ________.

14.设等差数列$\{a_n\}$满足公差$d\in N^+$, $a_n\in N^+$,且数列$\{a_n\}$中任意两项之和也是该数列的一项.若$a_1=3^5$，则d的所有可能取值之和为________.

三．解答题（本大题共 6 个小题，共 80 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

15.（本小题共 13 分）

已知$\triangle ABC$中，角A，B，C所对的边分别为a，b，c，且满足

$$\sin A(\sqrt{3}\cos A+\sin A)=\frac{3}{2}$$

（Ⅰ）求角A；

（Ⅱ）若$a=2\sqrt{2}$，$S_{\triangle ABC}=2\sqrt{3}$，求$b$，$c$的值.

16.（本小题共 13 分）

某校举行中学生“日常生活小常识”知识比赛,比赛分为初赛和复赛两部分，初赛采用选手从备选题中选一题答一题的方式进行；每位选手最多有 5 次答题机会，选手累计答对 3 题或答错 3 题即终止比赛，答对 3 题者直接进入复赛，答错 3 题者则被淘汰.已知选手甲答对每个题的概率均为$\frac{2}{3}$，且相互间没有影响.

(Ⅰ）求选手甲进入复赛的概率；

(Ⅱ) 设选手甲在初赛中答题的个数为X，试求X的分布列和数学期望.

17.（本小题共 14 分）

如图在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是菱形，$\angle BAD = 60^0$，

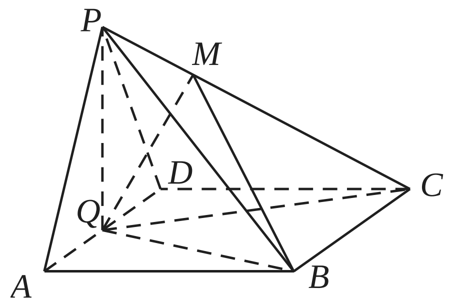
平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$，$PA = PD = AD = 2$，Q 为 AD 的中点，M 是棱 PC

上一点，且 $PM = \frac{1}{3}PC$.

（Ⅰ）求证：$PQ \perp$ 平面 $ABCD$；

（Ⅱ）证明：PA // 平面 BMQ；

（Ⅲ）求二面角 $M-BQ-C$ 的度数.



18.（本小题共 13 分）

已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 - x + \ln x$（$a \in R, a \neq 0$）

（Ⅰ）当 $a = 2$ 时，求曲线 $y = f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）若在区间 $[1, +\infty)$ 上函数 $f(x)$ 的图象恒在直线 $y = ax$ 下方，求 a 的取值范围.

19.（本小题共 14 分）

已知椭圆C的离心率$e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，长轴的左右端点分别为$A_1(-\sqrt{2},0)$，$A_2(\sqrt{2},0)$.

（Ⅰ）求椭圆C的方程；

（Ⅱ）设动直线$l:y=kx+b$与曲线C有且只有一个公共点P，且与直线$x=2$相交于点Q.问在x轴上是否存在定点N，使得以PQ为直径的圆恒过定点N，若存在，求出N点坐标；若不存在，说明理由.

20.（本小题共 13 分）

对任意实数列$A=\{a_1,a_2,a_3\cdots\}$，定义$\Delta A=\{a_2-a_1,a_3-a_2,a_4-a_3,\cdots\}$它的第$n$项为$a_{n+1}-a_n\quad(n\in N^+)$,假设$\Delta A$是首项是$a$公比为$q$的等比数列.

（Ⅰ）求数列$\Delta(\Delta A)$的前n项和T_n；

（Ⅱ）若$a_1=1$，$a=2$，$q=2$.

①求实数列$A=\{a_1,a_2,a_3\cdots\}$的通项a_n；

②证明：$\dfrac{n}{2}-\dfrac{1}{3}<\dfrac{a_1}{a_2}+\dfrac{a_2}{a_3}+\dfrac{a_3}{a_4}+\cdots+\dfrac{a_n}{a_{n+1}}<\dfrac{n}{2}$.

顺义区 2014 届高三第一次统练

高三数学（理科）试卷参考答案及评分标准　　2014.1

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	D	C	A	C	C	C	B

二.填空题(本大题共 6 个小题,每小题 5 分,共 30 分)其它答案参考给分

9．(1,1)；10. 8π；11. 15；　12. (1,0), 3；　13．2；14．364.

三．解答题（本大题共 6 小题，共 80 分）

15．（本小题共 13 分）a

解：（Ⅰ）由已知 $\sin A(\sqrt{3}\cos A+\sin A)=\dfrac{3}{2}$

$\therefore \sqrt{3}\sin A\cos A+\sin^2 A=\dfrac{3}{2}$，$\therefore \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2A+\dfrac{1-\cos 2A}{2}=\dfrac{3}{2}$————3 分

即 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2A-\dfrac{1}{2}\cos 2A=1$ $\therefore \sin(2A-\dfrac{\pi}{6})=1$————5 分

$\because 0<A<\pi$，$\therefore -\dfrac{\pi}{6}<2A-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{11\pi}{6}$

$\therefore$ 由 $\sin(2A-\dfrac{\pi}{6})=1$ 得 $2A-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore A=\dfrac{\pi}{3}$ ———7 分

（Ⅱ）由余弦定理 $8=b^2+c^2-bc$———9 分

又 $S_{\triangle ABC}=2\sqrt{3}$

$\therefore \dfrac{1}{2}bc\sin A=2\sqrt{3}$，$\therefore bc=8$ ———11 分

由 $\begin{cases} bc=8 \\ b^2+c^2-bc=8 \end{cases}$ 解得 $b=c=2\sqrt{2}$ ————13 分

16．（本小题共 13 分）

解：（Ⅰ）设选手甲答对每一个题的概率为 P，则 $P=\dfrac{2}{3}$

记选手甲进入复赛为事件 A，

则选手甲答了 3 个题均对进入复赛 $\therefore C_3^3(\dfrac{2}{3})^3=\dfrac{8}{27}$，————2 分

或选手甲答了 4 个题，前 3 个 2 对 1 错，第 4 次对进入复赛

$\therefore C_3^2(\dfrac{2}{3})^2\dfrac{1}{3}\dfrac{2}{3}=\dfrac{8}{27}$，————4 分

或选手甲答了 5 个题，前 4 个 2 对 2 错，第 5 次对进入复赛

$\therefore C_4^2(\dfrac{2}{3})^2(\dfrac{1}{3})^2\dfrac{2}{3}=\dfrac{16}{81}$————6 分

∴选手甲进入复赛的概率 $P(A)=\frac{8}{27}+\frac{8}{27}+\frac{16}{81}=\frac{64}{81}$ ————7 分

（Ⅱ） X 可取 $3,4,5$————8 分

对应 X 的每一个可能取值，选手可能被淘汰或进入复赛

$\therefore\ P(X=3)=C_3^3(\frac{2}{3})^3+C_3^3(\frac{1}{3})^3=\frac{1}{3}$

$P(X=4)=C_3^2(\frac{2}{3})^3\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+C_3^2(\frac{1}{3})^2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{10}{27}$

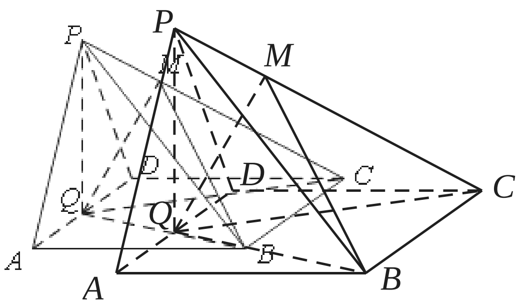
$P(X=5)=C_4^2(\frac{2}{3})^2\cdot(\frac{1}{3})^2\cdot\frac{2}{3}+C_4^2(\frac{2}{3})^2\cdot(\frac{1}{3})^2\frac{1}{3}=\frac{8}{27}$ ————11 分

分布列为：

X	3	4	5
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{27}$	$\frac{8}{27}$

$\therefore\ EX=\frac{107}{27}$ ————13 分

17.（本小题共 14 分）



（Ⅰ）由已知 $PA=PD$，Q 为 AD 的中点，

$\therefore\ PQ\perp AD$

Q平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$，交线 AD，

$PQ\subset$平面 PAD $\therefore\ PQ\perp$平面 $ABCD$.————4 分

（Ⅱ）连结 $AC\cap BQ=N$，连结 MN，

Q底面 $ABCD$是菱形，

$\therefore\ AQ\ /\!/\ BC$，$\therefore\ \triangle ANQ\backsim\triangle BCN$，$\frac{AQ}{BC}=\frac{AN}{NC}=\frac{1}{2}$，$\therefore\ \frac{AC}{AN}=3$

$\therefore\ \frac{AN}{AC}=\frac{1}{3}$，又 $\frac{PM}{PC}=\frac{1}{3}$ $\therefore\ \frac{PM}{PC}=\frac{AN}{AC}=\frac{1}{3}$————6 分

$\therefore\ MN\ /\!/\ PA$，Q $MN\subset$平面 BMQ，$PA\not\subset$平面 BMQ

$\therefore\ PA\ /\!/$平面 BMQ————8 分

（III）连结 BD，∵底面 $ABCD$ 是菱形，且 $\angle BAD=60^0$，

∴□BAD 是等边三角形，∴ $BQ\perp AD$ 由（Ⅰ） $PQ\perp$平面 $ABCD$.

∴ $PQ\perp AD$.

以 Q 为坐标原点，QA,QB,QP 分别为 x 轴 y 轴 z 轴建立空间直角坐标系

则 $Q(0,0,0),A(1,0,0),B(0,\sqrt{3},0),P(0,0,\sqrt{3})$.————10 分

设平面 BMQ 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，$\therefore\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{QB}=0\\\vec{m}\cdot\overrightarrow{MN}=0\end{cases}$，注意到 $MN\ /\!/\ PA$

$\therefore\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{QB}=0\\\vec{m}\cdot\overrightarrow{PA}=0\end{cases}$，解得 $\vec{m}=(\sqrt{3},0,1)$ 是平面 BMQ 的一个法向量——12 分

又平面 BCQ 的法向量为 $\vec{n}=\overrightarrow{QP}=(0,0,\sqrt{3})$

设二面角 $M-BQ-C$ 为 θ，

$\cos\theta=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{1}{2}$，$\therefore\theta=\dfrac{\pi}{3}$，即二面角 $M-BQ-C$ 为 60^0————14 分

18.（本小题共 14 分）

解：（Ⅰ）函数的定义域 $(0,+\infty)$————1 分

当 $a=2$ 时，$f(x)=x^2-x+\ln x$，$f'(x)=2x-1+\dfrac{1}{x}$————3 分

当 $x=1$ 时 $f(1)=0$，$f'(1)=2$

$\therefore$曲线在 $(1,f(1))$ 处的切线方程为：$2x-y-2=0$————5 分

（Ⅱ）令 $g(x)=f(x)-ax=\dfrac{1}{2}ax^2-x+\ln x-ax$ 定义域 $(0,+\infty)$

在区间 $[1,+\infty)$ 上，函数 $f(x)$ 的图象恒在直线 $y=ax$ 下方，

等价于 $g(x)<0$ 在 $[1,+\infty)$ 恒成立；————7 分

$\therefore$ 只要在 $[1,+\infty)$ 上 $g(x)_{\max}<0$ 恒成立————9 分

$\because$ $g'(x)=ax-1+\dfrac{1}{x}-a=\dfrac{(ax-1)(x-1)}{x}$，$\therefore$ 根为 $x_1=1,x_2=\dfrac{1}{a}$

$\therefore$当 $0<a\le1$，$x_1=1\le x_2=\dfrac{1}{a}$，$\therefore$ $g(x)$ 在 $(\dfrac{1}{a},+\infty)$ 单调递增，

并且在该区间上 $g(x)\in(g(x_2),+\infty)$，不可能有 $g(x)_{\max}<0$，不合题意

当 $a>1$，$x_2=\dfrac{1}{a}<x_1=1$，$\therefore$ $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增，

并且在该区间上 $g(x)\in[g(1),+\infty)$，不可能有 $g(x)_{\max}<0$，也不合题意

当 $a<0$，$x_2=\dfrac{1}{a}<0<x_1=1$，$\therefore$ $g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 单调递减，

$g(x)_{\max}=g(1)=\dfrac{1}{2}a-1+0-a<0$，解得 $-2<a<0$.

综上 $a\in(-2,0)$ 时函数 $f(x)$ 的图象恒在直线 $y=ax$ 下方. ————13 分

19.（本小题共 14 分）

解：（Ⅰ）由已知$a=\sqrt{2}$，$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$————2 分

$\therefore c=1$，$b=\sqrt{a^2-c^2}=1$

$\therefore$椭圆C的方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$；————4 分

（Ⅱ）$\begin{cases} y=kx+b \\ \frac{x^2}{2}+y^2=1 \end{cases}$消去得$(2k^2+1)x^2+4kbx+2b^2-2=0$

Q曲线C与直线l只有一个公共点，$\therefore \Delta=0$，

可得$b^2=2k^2+1$（*）————6 分

设$P(x_P,y_P)$，$\therefore x_P=\frac{-4kb}{2(2k^2+1)}=-\frac{2k}{b}$，$y_P=kx_P+b=\frac{1}{b}$

$\therefore P(-\frac{2k}{b},\frac{1}{b})$

又由$\begin{cases} y=kx+b \\ x=2 \end{cases}$，$\therefore Q(2,2k+b)$————8 分

设在x轴上存在定点$N(x_1,0)$，使得以PQ为直径的圆恒过定点，

$\therefore NP\perp NQ$，即$\overrightarrow{NP}\cdot\overrightarrow{NQ}=0$————10 分

$\therefore (-\frac{2k}{b}-x_1,\frac{1}{b})(2-x_1,2k-b)=0$，

$\therefore \frac{2k}{b}(x_1-1)+x_1^2-2x_1+1=0$对满足$b^2=2k^2+1$恒成立，

$\therefore \begin{cases} x_1-1=0 \\ x^2-2x_1+1=0 \end{cases}$，$\therefore x_1=1$

故在x轴上存在定点$N(1,0)$，使得以PQ为直径的圆恒过定点N.——14 分

20.（本小题共 13 分）

解：（Ⅰ）令□$A=\{b_1,b_2,b_3\cdots\}$这里$b_n=a_{n+1}-a_n,(n\in N^+)$

$\because$□A是公比为q的等比数列. $\therefore$□$A=\{b_1,b_1q,b_1q^2\cdots\}$

$\therefore$□(□$A)=\{b_1(q-1),b_1q(q-1),b_1q^2(q-1)\cdots\}$，

当$q=1$时，□(□$A)=\{0,0,0\cdots\}$，$\therefore T_n=0$，. ———2 分

当 $q \neq 1$ 时， □(□A) 是公比为 q ，首项为 $b_1(q-1)$ 的等比数列；.

$$T_n = \frac{b_1(q-1)(1-q^n)}{1-q} = -b_1(1-q^n) = a(q^n-1)$$.———4 分

$\therefore$ 综上 $T_n = a(q^n-1) \quad n \in N^+$.———6 分

（Ⅱ）①由题设 $a=2, q=2$ ， $\therefore b_n = 2^n$ ，

$\because a_{n+1} - a_n = b_n \qquad (n \in N^+)$ 叠加可得 $a_n = 2^n - 1$（ $n \in N^+$ ）.———8 分

②$\because \dfrac{a_k}{a_{k+1}} = \dfrac{2^k-1}{2^{k+1}-1} = \dfrac{2^k-1}{2(2^k-\frac{1}{2})} < \dfrac{2^k-1}{2(2^k-1)} = \dfrac{1}{2}$

$\therefore \dfrac{a_1}{a_2} + \dfrac{a_2}{a_3} + \dfrac{a_3}{a_4} + \cdots + \dfrac{a_n}{a_{n+1}} < \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{2} = \dfrac{n}{2}$.———10 分

又 $\because \dfrac{a_k}{a_{k+1}} = \dfrac{2^k-1}{2^{k+1}-1} = \dfrac{(2^k-\frac{1}{2})-\frac{1}{2}}{2(2^k-\frac{1}{2})} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2^2(2^k-\frac{1}{2})} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2(2^{k+1}-1)}$

$k \in N^+$， $2^k \geq 2$， $2^k - 2 \geq 0, 3\cdot 2^k + 2^k - 2 \geq 3\cdot 2^k$

即 $4\cdot 2^k - 2 \geq 3\cdot 2^k$， $\therefore 2\cdot(2^{K+1}-1) \geq 3\cdot 2^k$， $\therefore -\dfrac{1}{2\cdot(2^{K+1}-1)} \geq -\dfrac{1}{3\cdot 2^k}$

$\therefore \dfrac{a_k}{a_{k+1}} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2\cdot(2^{k+1}-1)} \geq \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3\cdot 2^k}$.———12 分

$\therefore \dfrac{a_1}{a_2} + \dfrac{a_2}{a_3} + \dfrac{a_3}{a_4} + \cdots + \dfrac{a_n}{a_{n+1}} \geq \dfrac{n}{2} - \dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} \cdots + \dfrac{1}{2^n}) > \dfrac{n}{2} - \dfrac{1}{3}(1 - \dfrac{1}{2^n}) > \dfrac{n}{2} - \dfrac{1}{3}$

即 $\dfrac{n}{2} - \dfrac{1}{3} < \dfrac{a_1}{a_2} + \dfrac{a_2}{a_3} + \dfrac{a_3}{a_4} + \cdots + \dfrac{a_n}{a_{n+1}} < \dfrac{n}{2}$.———13 分